

一类平面多项式系统的周期函数的临界点个数*

陈燕燕^{1,2}

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;
2. 广州科技贸易职业学院基础部, 广东 广州 511442)

摘 要: 主要讨论一类平面多项式系统的周期函数的临界点个数。首先研究了周期函数 $T(\rho, \varepsilon)$ 的表达式, 然后利用这一结果, 估计了该系统的一阶和二阶临界周期个数的上界。

关键词: 周期函数; 临界点

中图分类号: O175.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579(2009)04-0130-03

The Number of Critical Periods for a Planar Polynomial Systems

CHEN Yanyan^{1,2}

(1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China; 2. Department of Basic, Guangzhou Vocational College of Technology and Business, Guangzhou 511442, China)

Abstract: To study the number of critical periods for a planar polynomial system, the formula of the period function is obtained. Using the result, the upper bound for the number of one order critical periods and two order critical periods are obtained.

Key words: period function; critical periods

设有一个二维系统 X , 系统有一个中心 P , γ 表示 P 点外的闭轨线。函数 $T: \gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ 表示经过 γ 上的一点 ξ 的闭轨的最小正周期, 则称这个函数为周期函数。对于周期函数 T , 如果有点 ξ^* , 使得 $T'(\xi^*) = 0$, 我们称 ξ^* 为周期函数的临界点, ξ^* 所对应的周期称为临界周期。因为临界周期可能为周期函数的最大值或最小值, 因此, 周期函数的单调性问题, 就是估计一个系统的周期函数的临界点个数。

20 世纪 80 年代以来, 许多学者已经研究了平面多项式系统, 特别是二次系统的周期函数。在文 [1] 中, Zoladek 将二次系统的中心分为四类: Hamiltonian (Q_3^H), Reversible (Q_3^R), Codimension four (Q_4), Generalized Lotka-Volterra (Q_3^{LV})。1993 年, Coppel 等^[2]证明了系统 Q_3^H 有单调的周期函数。2002 年, 赵育林^[3]证明了系统 Q_4 也具有单调

的周期函数。对于 Q_3^{LV} 和 Q_3^R 系统, 人们只得到了部分的结果^[4-6]。

设

$$\dot{x} = P_0(x, y), \quad \dot{y} = Q_0(x, y) \quad (1)$$

是一个以原点为等时中心的多项式系统, 其周期为

$$T = T_0。估计扰动系统 \dot{x} = P_0(x, y) + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l P_l(x, y),$$

$$\dot{y} = Q_0(x, y) + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l Q_l(x, y) \quad (2)$$

的周期函数的临界点个数, 是周期函数分支理论研究的重要问题之一。这里 $P_l(x, y), Q_l(x, y), l = 1, 2, \dots$ 为 n 次的多项式, 且当 ε 充分小时, 系统 (2) 仍以原点为中心。对系统 (2) 作极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 然后给出两个定义。

定义 1 设系统 (2) 经过点 $\theta = 0, r = \rho$ 的解的周期 $T(\rho, \varepsilon)$ 可表示成

* 收稿日期: 2008-09-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571184)

作者简介: 陈燕燕 (1979 年生), 女, 硕士生, 讲师; E-mail: dyanr@163.com

$$T(\rho, \varepsilon) = 2\pi + \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\rho) \varepsilon^i \quad (3)$$

的形式, 并且 $T_1(\rho) \equiv T_2(\rho) \equiv \dots \equiv T_{k-1}(\rho) \equiv 0$, $T_k(\rho)$ 不恒等于零。当方程 $T_k(\rho) = 0$ 有 l 个正单根时, 我们称系统 (2) 的中心轨道有 l 个 k 阶的临界周期。

定义 2 记 $N^n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 为系统 (2) 的周期函数临界点个数的最大值, 记 N_k^n 为系统 (2) 的周期函数的 k 阶临界周期个数的最大值。

到目前为止, 人们对 N^n 、 N_k^n 的研究非常有限, Cima 等^[7]通过研究系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l P_l(x, y), \\ \dot{y} &= x + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l Q_l(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

的周期函数的一阶和二阶临界周期个数的上界, 得到 $N_1^n = \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$, $N_2^n = 2 \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$, 再由文 [7] 的定理 2 可知 $N^n \geq N_k^n$, 从而估计了该系统的周期函数临界点个数的最大值 $N^n \geq 2 \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ 。

利用文 [7] 的思想, 本文估计了一类平面多项式系统的周期函数的一阶和二阶临界周期个数, 提高了 N_1^n 的上界, 得到了较好的结果。

1 主要的结果与证明

考虑多项式系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1 + \varepsilon f(x, y)) \\ \dot{y} = x(1 + \varepsilon f(x, y)) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $f(x, y) = \sum_{l+m \leq n} a_{lm} x^l y^m$, $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 。显然, 系统 (5) 唯一的奇点 $(0, 0)$ 是中心。

作极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 于是 (5) 可化为:

$$\frac{dr}{dt} = 0, \frac{d\theta}{dt} = 1 + \varepsilon \sum_{l+m \leq n} a_{lm} r^{l+m} \cos^l \theta \sin^m \theta \quad (6)$$

记

$$B_1(r, \theta) = \sum_{l+m \leq n} a_{lm} r^{l+m} \cos^l \theta \sin^m \theta。$$

由 (6) 可看出, 系统 (5) 的轨线是以原点为中心, 以 r 为半径的圆, 经过点 $\theta = 0, r = \rho$ 的轨线方程为 $r = \rho$ 。

定理 1 设 $T(\rho, \varepsilon)$ 为系统 (5) 经过点 $\theta = 0$, $r = \rho$ 的解的周期, 则函数 $T(\rho, \varepsilon)$ 可表达为 (3) 的形式, 其中

$$T_i(\rho) = (-1)^i \int_0^{2\pi} B_1^i(\rho, \theta) d\theta, i = 1, 2, 3, \dots$$

证明 因为 $\theta = \frac{d\theta}{dt}$, 即 $dt = \frac{d\theta}{\theta}$, 两边同时积

分可得:

$$T(\rho, \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon B_1(\rho, \theta)} d\theta$$

又因为 $0 < |\varepsilon| \ll 1$, 故当 $|\varepsilon B_1(\rho, \theta)| < 1$ 时,

$$T(\rho, \theta) = 2\pi - \varepsilon \int_0^{2\pi} B_1(\rho, \theta) d\theta + \varepsilon^2$$

$$\int_0^{2\pi} B_1^2(\rho, \theta) d\theta - \varepsilon^3 \int_0^{2\pi} B_1^3(\rho, \theta) d\theta + O(\varepsilon^4)$$

定理 1 得证。

为了便于计算, 给出引理 1。

引理 1 设 $I(l, m) = \int_0^{2\pi} \cos^l \theta \sin^m \theta d\theta$, 则

(a) 当 l 与 m 均为偶数时,

$$\begin{aligned} I(l, m) &= \frac{l-1}{l+m} \cdot \frac{l-3}{m+l-2} \cdot \frac{l-5}{m+l-4} \cdots \frac{3}{m+4} \cdot \\ &\quad \frac{1}{m+2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \end{aligned}$$

(b) 当 l 与 m 至少有一个为奇数时, $I(l, m) = 0$ 。

为了证明定理 2, 先证明以下两个命题。

命题 1 对系统 (5), 有 $N_1^n \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ 。

证明 根据定理 1,

$$T_1(\rho) = - \int_0^{2\pi} B_1(\rho, \theta) d\theta =$$

$$- \sum_{l+m \leq n} (a_{lm} \int_0^{2\pi} \cos^l \theta \sin^m \theta d\theta) \rho^{l+m}$$

再由引理 1, 当 n 为奇数时,

$$\begin{aligned} T_1'(\rho) &= - \rho \{ 2[a_{20} I(2, 0) + a_{02} I(0, 2)] + \\ &\quad 4[a_{40} I(4, 0) + a_{04} I(0, 4) + a_{22} I(2, 2)] \rho^2 + \cdots + \\ &\quad (n-1) \left(\sum_{l+m=2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{lm} I(l, m) \right) (\rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \} = - \rho F(\rho^2) \end{aligned}$$

$F(\rho^2)$ 是 ρ^2 的 $\frac{n-3}{2}$ 次的多项式, $\frac{n-3}{2}$ 次的

多项式最多有 $\frac{n-3}{2}$ 个正单根, 故 $T_1(\rho)$ 最多有

$\frac{n-3}{2}$ 个正单根 ρ 。

同理, 当 n 为偶数时, $F(\rho^2)$ 是 ρ^2 的 $\frac{n-2}{2}$ 次

的多项式, 故 $T_1(\rho)$ 最多有 $\frac{n-2}{2}$ 个正单根 ρ 。命题 1 得证。

命题 2 当 $f(x, y) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$ 时, 系统 (5) 的

周期函数可以存在 $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ 个一阶临界周期。

证明 对于系统 (5), 特别地, 若令 $f(x, y) =$

$\sum_{l=0}^n a_l x^l$, 且 n 为偶数, 有

$$T_1(\rho) = - \int_0^{2\pi} B_1(\rho, \theta) d\theta = - \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^n a_l \cos^l \theta \rho^l d\theta = - [2a_0\pi + a_2 I(2,0)\rho^2 + a_4 I(4,0)\rho^4 + \cdots + a_n I(n,0)\rho^n]$$

$$T_1'(\rho) = -\rho[2a_2 I(2,0) + 4a_4 I(4,0)\rho^2 + \cdots + na_n I(n,0)(\rho^2)^{\frac{n-2}{2}}] = -\rho F_3(\rho^2)$$

其中 $F_3(\rho^2)$ 是 ρ^2 的 $\frac{n-2}{2}$ 次的多项式, 为了使 $T_1'(\rho)$ 存在 $\frac{n-2}{2}$ 个正单根, 下面构造满足要求的多项式系数。

可以找到另外一个具有 $\frac{n-2}{2}$ 个正单根的 $\frac{n-2}{2}$ 次多项式

$$h(x) = B_{\frac{n-2}{2}}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{\frac{n-2}{2}}) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_{\frac{n-2}{2}}x^{\frac{n-2}{2}}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_{\frac{n-2}{2}}$ 为给定的不同的正数。令 $2a_2 I(2,0) = B_0, 4a_4 I(4,0) = B_1, \cdots, na_n I(n,0) = B_{\frac{n-2}{2}}$ 可解得 $a_2, a_4, \cdots, a_n$ 。即当 $a_2 = B_0/2I(2,0), a_4 = B_1/2I(4,0), \cdots, a_n = B_{\frac{n-2}{2}}/nI(n,0)$ 时, $T_1'(\rho)$ 有 $\frac{n-2}{2}$ 个正单根 ρ 。

因此, 当 n 为偶数时, 存在 $f(x,y) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$, 使得系统 (5) 的周期函数存在 $\frac{n-2}{2}$ 个一阶临界周期。

同理可证, 当 n 为奇数时, 存在 $f(x,y) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$, 使得系统 (5) 的周期函数存在 $\frac{n-3}{2}$ 个一阶临界周期。命题 2 得证。

定理 2 对系统 (5), 有 $N_1^n = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ 。

证明 命题 1 证明了当 $f(x,y)$ 为 n 次多项式时, 一阶临界周期的个数的上界为 $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$, 命题 2 又证明了这个上界是可以达到的。因此, 由命题 1 和命题 2 可得, 对系统 (5), 有 $N_1^n = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$, 定理 2 得证。

由定义 2 可知, 只有当 $T_1(\rho) \equiv 0$ 时, 我们才需要研究 $T_2(\rho)$ 。以下的命题 3 说明满足定理 3 条件的系统是存在的。

命题 3 设系统 (5) 的周期函数可表示为 (3) 的形式, 存在 n 次多项式 $f(x,y) = \sum_{l+m \leq n} a_{lm} x^l y^m$ (其中 l, m 至少有一个为奇数), 使得在 (3) 中, $T_1(\rho) \equiv 0$ 。

运用类似于上面的一些技巧, 不难证明下面的定理 3 成立。

定理 3 对系统 (5) 的周期函数 $T(\rho, \varepsilon)$, 如果 $T_1(\rho) \equiv 0$, 则有 $N_2^n \leq n-1$ 。

对系统 (5), 由定理 2 和定理 3 可得:

定理 4 当 ε 充分小时, 若 $T_1(\rho)$ 不恒等于零, 则系统 (5) 的周期函数 $T(\rho, \varepsilon)$ 的临界点个数的最大值 $N^n \geq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$; 当 $T_1(\rho) \equiv 0, T_2(\rho)$ 不恒等于零时, 系统 (5) 至多有 $n-1$ 个二阶的临界周期。

参考文献:

- [1] ZOLADEK H. Quadratic systems with centers and their perturbations [J]. J Differential Equations, 1994, 109: 223 - 273.
- [2] COPPEL W A, GAVRILOV L. The periods function of a Hamiltonian quadratic system [J]. Differential Integral Equations, 1993, 6: 1357 - 1365.
- [3] ZHAO Y. The monotonicity of period function for codimension four quadratic system Q_4 [J]. J Differential Equations, 2002, 185: 370 - 387.
- [4] VILLADELPRAT J. The period function of the generalized Lotka-Volterra centers [J]. J Math Anal Appl, 2008, 341: 834 - 854.
- [5] MAÑOSAS F, VILLADELPRAT J. The bifurcation diagram of the period function of the dehomogenized Loud's centers is bounded [J]. Proc Amer Math Soc, 2008, 136: 1631 - 1642.
- [6] VILLADELPRAT J. On the reversible quadratic centers with monotonic period function [J]. Proc Amer Math Soc, 2007, 135: 2555 - 2565.
- [7] CIMA A, GASULL A, SILVA P. On the number of critical period for planar polynomial systems [J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69: 1889 - 1903.